13/03/2018

Ολική Διαφορική Γεωμετρία

* Μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος του διανυσματικού πεδίου w αναλύεται σε 2 συνιστώσες μια συνιστώσα τ εφαπτόμενη και μια ν παράλληλη στο $\overline{N}$.

Ορίσαμε

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \left(\frac{dw(t)}{dt}\right)^{T_{c(t)}S} = \frac{dw(t)}{dt} - \langle \frac{dw}{dt}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t))$$

και δείξαμε ότι $\frac{D(w_1+w_2)}{dt} = \frac{Dw_1}{dt} + \frac{Dw_2}{dt}$

$$\frac{D(fw)}{dt} = \frac{df}{dt}w + f\frac{Dw}{dt}, \quad f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

<u>Πρόταση</u>: Αν w_1, w_2 είναι 2 διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $c: I\subset\mathbb{R}\to S$, τότε ισχύει:

$$\frac{d\langle w_1, w_2\rangle}{dt} = \langle \frac{Dw_1}{dt}, w_2\rangle + \langle w_1, \frac{Dw_2}{dt}\rangle$$

Απόδειξη: $\frac{d}{dt}\langle w_1, w_2\rangle = \langle \frac{dw_1}{dt}, w_2\rangle + \langle w_1, \frac{dw_2}{dt}\rangle =$

$$= \langle \frac{Dw_1}{dt} + (\ldots)N, w_1\rangle + \langle w, \frac{Dw_2}{dt} + (\cdot)N\rangle$$

Το w καλείται παράλληλο κατά μήκος της $c \Leftrightarrow \frac{Dw}{dt} = 0$

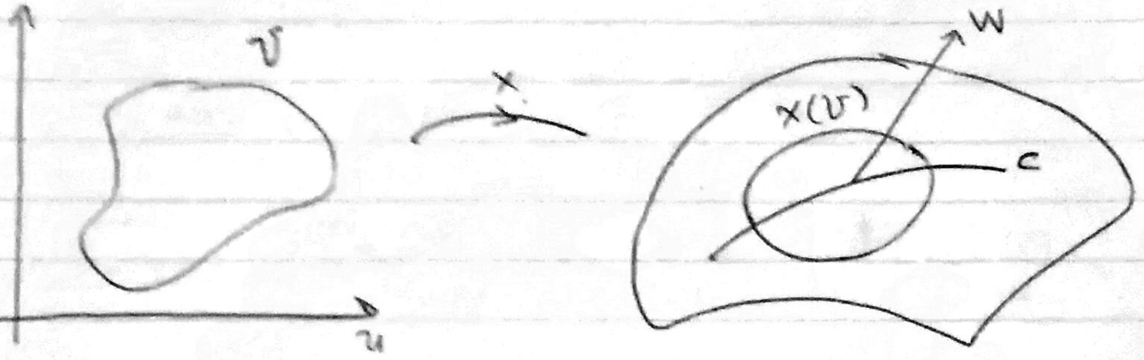
Παρατήρηση:

(i) Αν W είναι $\parallel$ διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c τότε $\|w(t)\| = \text{σταθ}$, $\forall t \in I$

(ii) Αν W_1, W_2 είναι παράλληλα διανυσματικά πεδία με $W_1 \neq 0$ και $W_2 \neq 0$ τότε $\measuredangle(w_1(t), w_2(t)) = \text{σταθ}$ $\forall t$.

[Δηλαδή διατηρούνται τα μήκη & οι γωνίες. Θυμίζει ισομετρία]

Έκφραση Συναλλοίωτης Παραγώγου.



$c(t) = x(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$w(t) = a(t) x_u(u(t), v(t)) + b(t) x_v(u(t), v(t))$ $\forall t$

με $a, b : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ λεία συναρτήσεις.

Αποδείξαμε:
$$\frac{Dw(t)}{dt} = \{a'(t) + u'(t)a(t)\Gamma_{11}^1 + u'(t)b(t)\Gamma_{12}^1 + v'(t)a(t)\Gamma_{12}^1 + v'(t)b(t)\Gamma_{22}^1\} x_u +$$
$$+ \{b'(t) + u'(t)a(t)\Gamma_{11}^2 + u'(t)b(t)\Gamma_{12}^2 + v'(t)a(t)\Gamma_{12}^2 + v'(t)b(t)\Gamma_{22}^2\} x_v$$

[Δηλαδή εξαρτάται μόνο από την 1η θεμ. μορφή, άρα είναι προϊόν της εσωτερικής γεωμετρίας]

Πρόταση: $c: I \to S$, $w \in T_{c(t_0)}S$. Τότε $\exists$ μοναδικό διανυσματικό πεδίο W κατά μήκος της c, τω $W(t_0) = w$

Απόδειξη: (I) $c(I) \subset x(U)$ για κάποιο σύστημα συντεταγμένων x

(II) Αν $\nexists$ τέτοιο σύστημα ώστε $c(I) \subset x(U)$

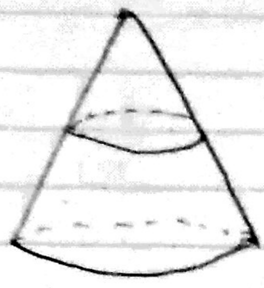
(τότε πηγαίνω σε ένα σημείο της καμπύλης και βρίσκω τοπικά ένα σύστημα συντεταγμένων και κάνω στο (I) και προχωράω δεξιά - αριστερά ώστε να καλύψω όλη την c)

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S_1 \cap S_2$

Λέμε ότι οι επιφάνειες S_1, S_2 εφάπτονται κατά μήκος της $c \iff T_{c(t)}S_1 = T_{c(t)}S_2 \quad \forall t \in I$

(Πχ)

και



Μας ενδιαφέρει αυτή η περίπτωση των εφαπτόμενων επιφανειών γιατί:

$$\frac{D^1 w(t)}{dt} = \left(\frac{dW(t)}{dt} \right)^{T_{c(t)}S_1}$$

$$\frac{D^2 w(t)}{dt} = \left(\frac{dW(t)}{dt} \right)^{T_{c(t)}S_2}$$

(Εφόσον εφάπτονται οι S_1, S_2 οι συναρτήσεις θα είναι ίσες)

$\boxed{\text{Συμπέρασμα}}$ $\frac{D^1 w}{dt} = \frac{D^2 w}{dt}$

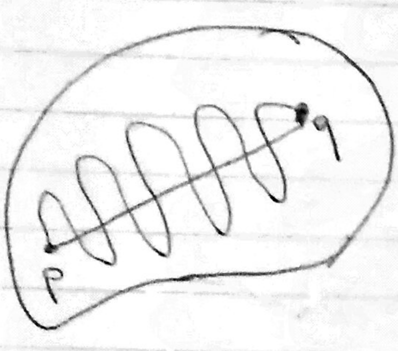
Ας δούμε γιατί στην σφαίρα $\frac{Dc'}{dt}=0$

Ισχύει από $\frac{D^{S^2}w}{dt}(t) = \frac{D^{K}w}{dt}(t)$ → κύλινδρος

σφαίρα

(Ξέρουμε ότι κύλινδρος-επίπεδο ισομετρικές επιφάνειες.)

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης μήκους καμπύλης σε επιφάνεια



Στο επίπεδο: $c: I \to (\Pi)$

$$\frac{Dc'}{dt} = c''=0 \Leftrightarrow c(t) = p_0 + tv$$

ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια. Μια καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καλείται γεωδαισιακή (ή γεωδαιτική) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $c'(t)$ είναι // κατά μήκος της c δηλαδή αν

$$\frac{Dc'}{dt}=0 \quad \forall t \in I.$$

Σημαντική Παρατήρηση:

ικανή συνθήκη όχι όμως αναγκαία γιατί

Αν $c: I\subset \mathbb{R}\to S$ γεωδαισιακή της S τότε $\|c'(t)\| = σταθ$, $\forall t\in I$

Προσοχή: Δεν επιτρέπονται παραμετρήσεις στις γεωδαισιακές γιατί πρέπει πάντα $\|c'(t)\| = σταθ$, $\forall t\in I$

(Π.χ)

$c(t) = p_0 + tv$ γεωδαισιακή $c' = σταθ$.

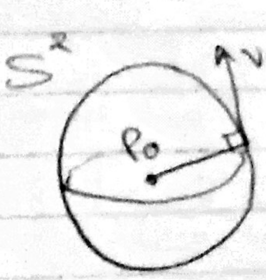
$\tilde{c}(t) = p_0 + t^3 v$ όχι γεωδαισιακή $c' \neq σταθ$

Έστω γεωδαισιακή $c: I\subset\mathbb{R}\to S$, $t_0\in I$. Το μήκος τόξου με αφετηρία το t_0 είναι η συνάρτηση $s: I\to\mathbb{R}$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|\, du = \int_{t_0}^{t} a\, du \quad , \quad s = a(t-t_0)$$

Συμπέρασμα: Οι μόνες αναπαραμετρήσεις γεωδαισιακή για να παραμένουν γεωδαισιακές είναι οι γραμμικές συναρτήσεις του μήκους τόξου

(Π.χ) Μέγιστοι κύκλοι μοναδιαίας σφαίρας είναι γεωδαισιακές?



$c(t) = (\cos t, \sin t)$

Πώς μπορώ να αναπαραμετρήσω το μέγιστο κύκλο?

↳ $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

Δοκιμάζω $c(t) = \cos t \cdot p_0 + \sin t \cdot v$

βλέπω $\left.\begin{array}{l} c(0) = p_0 \\ c'(0) = v \end{array}\right\}$ ⊛

όμως παρατηρώ $\|c(t)\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t \, \|v\|^2$
αυτό δεν είναι κύκλος στην πραγματικότητα. Είναι έλλειψη!

Αυτό που ευθύνεται είναι το $\|v\|$ άρα πρέπει να βρω μία αναπαραμέτρηση ώστε να μην χαλάνε οι προϋποθέσεις ⊛
και παράλληλο v να είναι μοναδιαίο.

Ξαναδοκιμάζω: $c(t) = \cos(\|v\|t)p_0 + \sin(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}$

τότε $c(0) = p_0$, $c'(0) = v$
ενώ $\|c(t)\|^2$ = μέγιστος κύκλος

Είναι γεωδαισιακή?

$$\frac{Dc'}{dt} = (c''(t))^{T_{c(t)}S^2}$$

$$c'(t) = -\|v\|\sin(\|v\|t)p_0 + \cos(\|v\|t)v$$

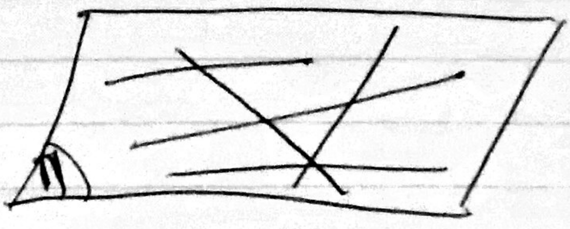
$$c''(t) = -\|v\|^2\cos(\|v\|t)p_0 - \|v\|\sin(\|v\|t)v =$$

$$= -\|v\|^2\left(\cos(\|v\|t)p_0 + \sin(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}\right)$$

δηλαδή $c''(t) = -\|v\|^2 c(t) \Rightarrow (c''(t))^{T_{c(t)}S^2} = 0$ (γιατί διάνυσμα θέσης = ακτίνα)

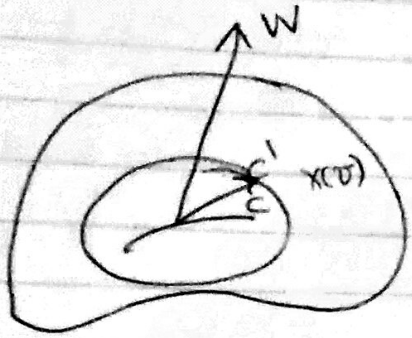
Άρα $\frac{Dc'}{dt} = 0$

Στο επίπεδο έχω γεωδαισιακή οι φαι ευθείες = γεωδαισιακές



Ερώτημα: Έχω σε κάθε επιφάνεια γεωδαισιακή; Γιατί;

ΥΠΑΡΞΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΩΝ ΣΕ ΤΥΧΟΥΣΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



Έστω διανυσματικό πεδίο:

$$w(t) = a(t) X_u(u(t),v(t)) + b(t) X_v(u(t),v(t))$$

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \left\{ a'(t) + u'(t)a(t)\Gamma^1_{11} + u'(t)b(t)\Gamma^1_{12} + v'(t)a(t)\Gamma^1_{12} + v'(t)b(t)\Gamma^1_{22} \right\} X_u +$$
$$+ \left\{ b'(t) + u'(t)a(t)\Gamma^2_{11} + u'(t)b(t)\Gamma^2_{12} + v'(t)a(t)\Gamma^2_{12} + v'(t)b(t)\Gamma^2_{22} \right\} X_v$$

$$c'(t) = u'(t) X_u(u(t),v(t)) + v'(t) X_v(u(t),v(t)) \ w$$

οπότε

$$\frac{Dc'}{dt}(t) = \left\{ u''(t) + (u'(t))^2 \Gamma^1_{11} + 2u'(t)v'(t)\Gamma^1_{12} + (v'(t))^2 \Gamma^1_{22} \right\} X_u +$$
$$+ \left\{ v''(t) + (u'(t))\Gamma^2_{11} + 2u'(t)v'(t)\Gamma^2_{12} + (v'(t))^2 \Gamma^2_{22} \right\} X_v$$

Λήμμα: Η καμπύλη $c(t) = X(u(t),v(t))$ είναι γεωδαισιακή της S αν

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + (v')^2 \Gamma^1_{22} = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + (v')^2 \Gamma^2_{22} = 0 \end{cases}$$

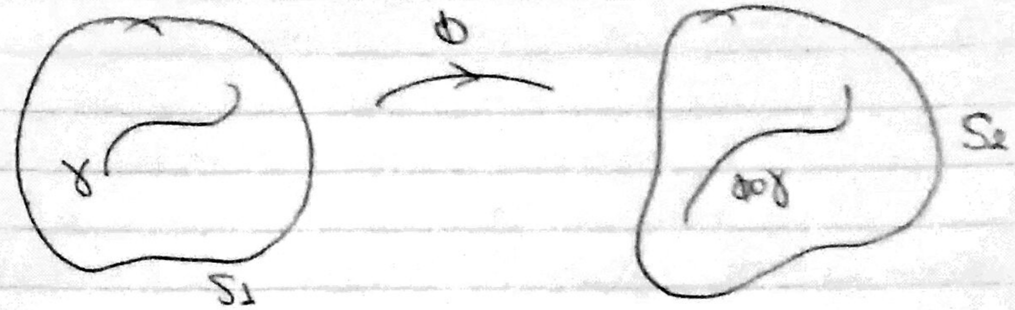
(Σύστημα διαφ. εξισώσεων μη-γραμμικό 2ης τάξης)

Θεώρημα: Για κάθε σημείο $p \in S$ και $v \in T_pS \setminus \{0\}$ υπάρχει γεωδαισιακή μοναδική $\gamma : (-\varepsilon(p), \varepsilon(p)) \to S$ του $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$

$\longrightarrow$

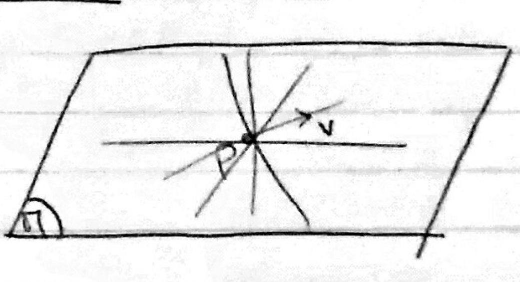
⊛ Μοναδικά σημαίνει ότι 2 γεωδαισιακές δεν μπορούν να διέρχονται από ένα σημείο και να διέρχονται

Πρόταση: Οι γεωδαισιακές εξαρτώνται μόνο από την 1η θεμελιώδη μορφή. Ειδικά αν $\phi: S_1 \to S_2$ είναι τοπική ισομετρία και $\gamma: I \to S_1$ είναι γεωδαισιακή τότε $\phi\circ\gamma$ είναι γεωδαισιακή της S_2.

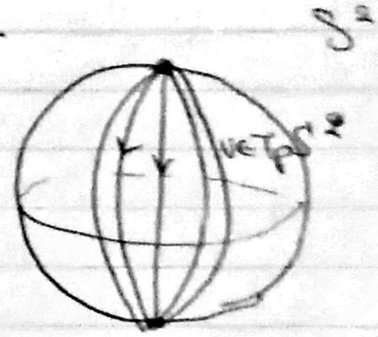


ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΩΝ (είναι δύσκολο να βρω όλες τις γεωδαισιακές σε κάθε επιφάνεια)

Επίπεδο



Σφαίρα

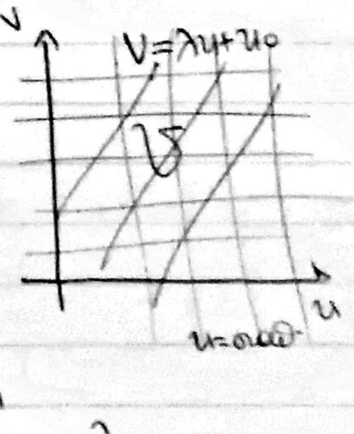


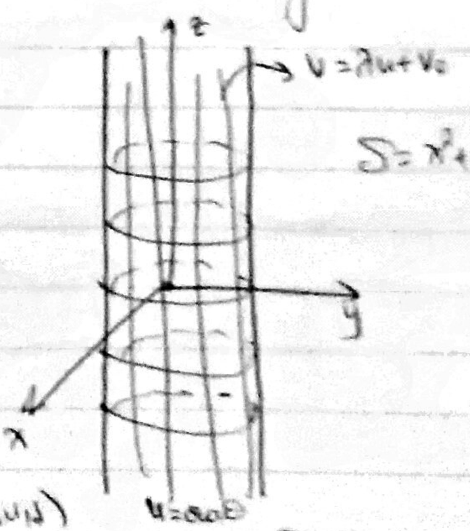
Οι γεωδαισιακές απομακρύνονται

Οι γεωδαισιακές αρχικά απομακρύνονται και στη συνέχεια ξανασυναντώνται

Κύλινδρος

Παίρνω το $U \subseteq$ επιπέδου γιατί όλο το επίπεδο δεν είναι απλή συνεκτική επιφάνεια.





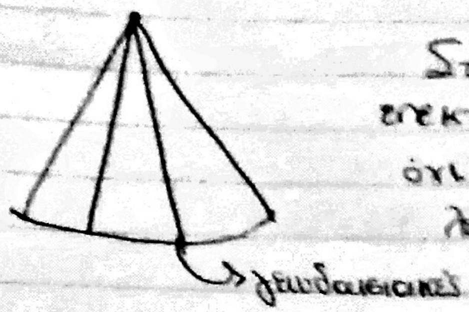
$S = x^2+y^2=1$

$x: U \to S^2$ ισομετρία με $X(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

με $(u,v) \in U = (0,2\pi)\times\mathbb{R}$, $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

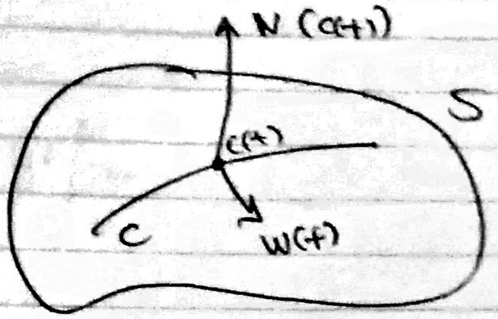
$X_v = (0,0,1)$ με $E = G = 1$, $F = 0$

Κώνος



Στο επίπεδο, σφαίρα, κύλινδρος γεωδαισιακές επεκτείνονται επ' άπειρον ενώ στον κώνο όχι. Στις 3 πρώτες οι γεωδαισιακές λέγονται πλήρεις

Συναλλοίωτη Παράγωγος $\boxed{\text{Μοναδιαίων}}$ Διανυσματικών Πεδίων



έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to S$ καμπύλη και $W: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c με $\|W(t)\|=1\ \forall t\in I$

δηλαδή $1=\langle W(t),W(t)\rangle \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0=\frac{d}{dt}\langle W,W\rangle = 2\langle \frac{DW}{dt},W\rangle \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{DW(t)}{dt}\perp W(t) \\ \frac{DW}{dt}(t)\perp N(c(t)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{DW}{dt}(t)\parallel N(c(t))\times W(t) \rightarrow$$

$\Longrightarrow \frac{DW(t)}{dt} = \lambda(t)\, N(c(t))\times W(t)$ δηλαδή $\lambda: I\to\mathbb{R}$.

$$\langle \frac{DW}{dt}, N\circ c\times W\rangle = \lambda\|N\circ c\times W\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \langle \frac{dW}{dt}, N\circ c\times W\rangle = \lambda\cdot 1\cdot 1\sin^2\frac{\pi}{2}$$

δηλαδή $\lambda = \langle \frac{dW}{dt}, N\circ c\times W\rangle = \langle \frac{DW}{dt}, N\times W\rangle$

$N(c(t))\times W(t)$ βρίσκω το $T_{c(t)}S$

Ορισμός: Έστω W μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $c: I \subset \mathbb{R} \to S$.

Η συνάρτηση $\left[\frac{DW}{dt}\right] = \lambda = \left\langle \frac{DW}{dt}, N \times W \right\rangle = \left\langle \frac{dW}{dt}, N \times W \right\rangle$

καλείται αλγεβρική τιμή της συναλλοίωτης παραγώγου του W

Δηλαδή ισχύει $\frac{DW}{dt} = \left[\frac{DW}{dt}\right] N \circ c \times W$

και συμπεραίνουμε ότι W παράλληλο $\iff \frac{DW}{dt} = 0 \iff \left[\frac{DW}{dt}\right] = 0$

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ κανονική αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου s
τότε έχω $\|\dot{c}(s)\| = 1 \quad \forall s \in I$

Δηλαδή για $W = \dot{c}$. Η c είναι του $S \iff \frac{D\dot{c}}{ds} = 0 \iff \left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right] = 0$

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Ορισμός: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s
Η συνάρτηση $k_g: I \to \mathbb{R}$ με $k_g = \left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right]$ καλείται γεωδαισιακή

καμπυλότητα της $c: I \to S$

Πόρισμα: Έστω $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου
Η c είναι γεωδαισιακή της $S \iff k_g = 0$

⊛ Κάτι αντίστοιχο με καμπυλότητα στις καμπύλες, αλλά αυτό έχει να κάνει με την έσωθεν γεωμετρία (όπως την αντιλαμβάνονται αυτοί που βρίσκονται στην επιφάνεια)
(Επιπλέον αισθάνονται τον προσανατολισμό)

- $K_g = \left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right] = \langle \ddot{c}, N\circ c \times \dot{c} \rangle$

ΣΧΕΣΗ K_c και K_g

Ισχύει ότι $K = \|\ddot{c}\|$

Δείξαμε ότι $\frac{D\dot{c}}{ds}(s) = (\ddot{c}(s))^{T_{c(s)}S} = \ddot{c}(s) - \langle N(c(s)), \ddot{c}(s)\rangle N(c(s))$

$\ddot{c}(s) = \frac{D\dot{c}}{ds}(s) + \langle N(c(s)), \ddot{c}(s)\rangle N(c(s))$ ⟶

Εφαπτόμενη συνιστώσα

κάθετη συνιστώσα.

$\Rightarrow \|\ddot{c}(s)\|^2 = \left\|\frac{D\dot{c}}{ds}(s)\right\|^2 + \left(\langle N\circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K^2(s) = K_g^2(s) + \left(\langle N\circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle\right)^2.$

Παραγωγίζω:

$\langle N\circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle = \left(\langle N\circ c(s), \dot{c}(s)\rangle\right)^{\cdot} - \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s)\rangle =$

$= -\langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s)\rangle = -\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s)\rangle =$

$= \langle L_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s)\rangle.$ ⟹

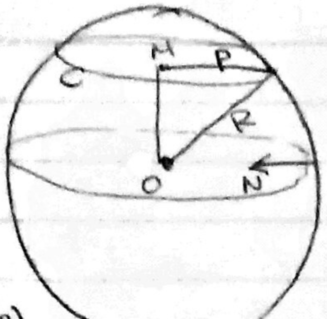
⟶

κάθετη καμπυλότητα

$\Rightarrow \langle N\circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle = II_{c(s)}(\dot{c}(s)) = K_N(\dot{c}(s))$

άρα $\boxed{K^2(s) = K_g^2(s) + K_N^2(\dot{c}(s))}$

<u>Εφαρμογή</u>: Κόβω τη σφαίρα με ένα επίπεδο και παίρνω έναν κύκλο, την καμπύλη c.



$S^2(R)$

έστω $c: I \to S^2(R)$ (μικρός κύκλος)

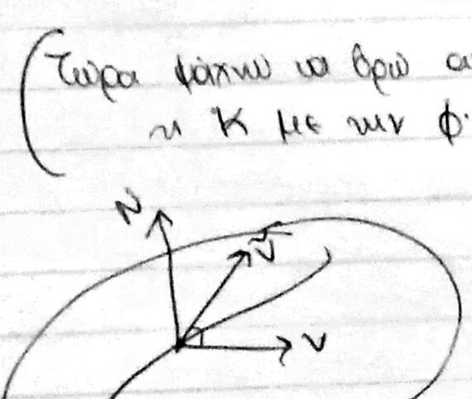
$K_c = \frac{1}{\rho}$, $K_n = \frac{1}{R}$ (κάθετη καμπυλότητα)

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα του μικρού κύκλου είναι: $K_g^2 = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{R^2-\rho^2}{\rho^2 R^2}$

άρα $\boxed{K_g = \pm \frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho R}}$

ενώ $K_g = 0 \iff R=\rho \iff$ μέγιστος κύκλος

(Τώρα ψάχνω να βρω αν η K_g έχει κάτι αντίστοιχο, όπως έχει η K με την φ.)



έστω $c: I\subset\mathbb{R} \to S$, V, W μοναδιαία διανυσματικά πεδία κατά μήκος της c

<u>Στόχος</u>: Θέλω να συγκρίνω $\left[\frac{DV}{dt}\right]$, $\left[\frac{DW}{dt}\right]$

(Πρέπει να βρω σχέση των V, W)

$\longrightarrow$

- $\left[\frac{Dv}{dt}\right] = \langle v', \underbrace{N\times v}_{\tilde{v}} \rangle$

- $\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \langle w', \underbrace{N\times w}_{\tilde{w}} \rangle$

Παρατηρώ ότι $\{v(t), \tilde{v}(t)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $T_{\alpha(t)}S$

Εφόσον έχω ορθοκαν. βάση κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός :

$w = av + b\tilde{v}$, $a = \langle w, v \rangle$, $b = \langle w, \tilde{v} \rangle$

τότε $a^2+b^2=1$ για δεδομένο $t_0 \in I$ και ϕ_0
$\exists$ μοναδική λεία συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$ με

$$a(t) = \cos\phi(t) \, , \; b(t) = \sin\phi(t) \, , \; \phi(t_0) = \phi_0$$

Λήμμα του 1ου μαθήματος

άρα $w = \cos\phi \cdot v + \sin\phi \, \tilde{v}$

Επομένως: $\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \langle w', N\times w \rangle = \langle -\phi' \sin\phi \, v + \cos\phi \, v' + \phi' \cos\phi \, \tilde{v} + \sin\phi \, \tilde{v}' , -\sin\phi \, v + \cos\phi \, \tilde{v} \rangle =$

$$= \phi' \sin^2\phi + \cos^2\phi \langle v', \tilde{v} \rangle + \phi' \cos^2\phi - \sin^2\phi \langle \tilde{v}', v \rangle$$

- $N\times w = N\times(\cos\phi \, v + \sin\phi \, \tilde{v})$
  $= \cos\phi \, \tilde{v} + \sin\phi \, N\times(N\times v)$
  $= \cos\phi \, \tilde{v} - \sin\phi$

- $\langle v, v \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle v, v' \rangle = 0$
- $\langle v, \tilde{v} \rangle = 0$

δηλαδή

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \phi' + \langle v', \tilde{v} \rangle$$

Λήμμα: Έστω V, W μοναδιαία διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ τότε ισχύει:

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{όπου} \quad \phi = \measuredangle(V, W)$$